Correction du devoir surveillé $n°4$

Partie I : valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$.
Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
On pose aussi $\beta = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

1. $P(1) = 0$ donc $X - 1$ divise le polynôme P.
2. En effectuant la division euclidienne de P par $X-1$, on obtient $P = (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$.
   On note $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
3. $\mathbb{U}_5 = \{1, \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}}, \mathbf{e}^{\frac{4i\pi}{5}}, \mathbf{e}^{\frac{6i\pi}{5}}, \mathbf{e}^{\frac{8i\pi}{5}}\}$. D'où $P = (X-1)(X-\mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}})(X-\mathbf{e}^{\frac{4i\pi}{5}})(X-\mathbf{e}^{\frac{6i\pi}{5}})(X-\mathbf{e}^{\frac{8i\pi}{5}})$.
   Par conséquent, $P = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)$.
4. Par conséquent, $Q = (X^2 - 2\alpha X + 1)(X^2 - 2\beta X + 1)$
5. En développant, on obtient $Q = X^4 - 2(\alpha+\beta)X^3 + 2(1+2\alpha\beta)X^2 - 2(\alpha+\beta)X + 1$.Par identification des coefficients : $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ et $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$.
6. Donc α et β sont solutions de l'équation $(E) : x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$. Cette équation admet pour discriminant $\Delta = \frac{5}{4}$ et donc ses solutions sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Le réel α étant positif, $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Partie II : une équation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$(E) : (X-1)P' = nP$$

l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

On remarque d'abord que le polynôme nul est solution de (E).

Analyse :
On suppose que l'équation (E) admet une solution non nulle que l'on note P.

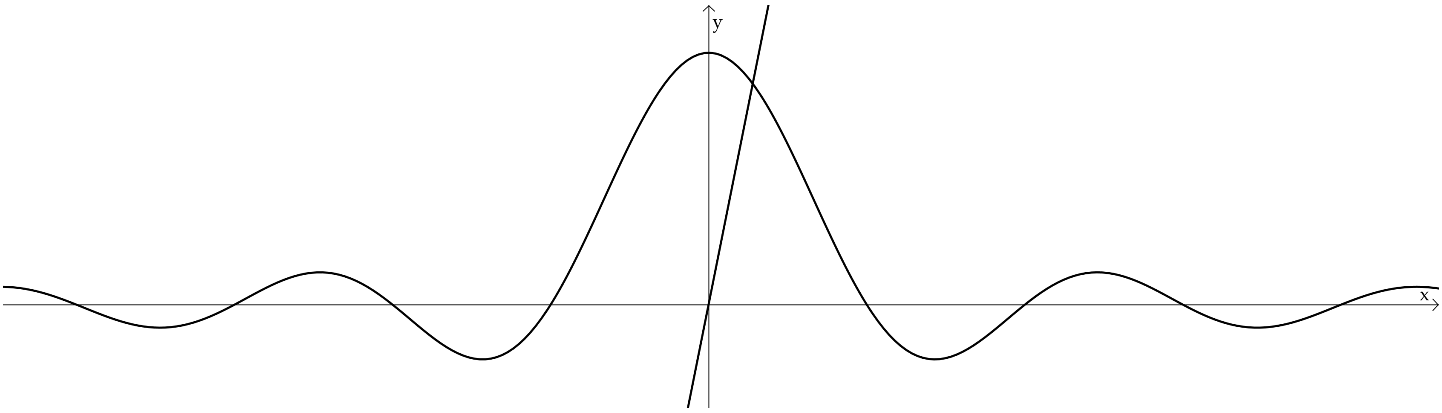
1. On note d le degré de P et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $(a_k)_{k\in[\![0,d]\!]} \in \mathbb{R}^{d+1}$ avec $a_d \neq 0$.
   Le coefficient dominant de $(X-1)P'$ est da_d et celui de nP est na_d.
   Or $(X-1)P' = nP$, donc $da_d = na_d$. De plus $a_d \neq 0$ donc $d = n$ i.e. $\deg(P) = n$.
2. (a) En évaluant en 1 l'égalité $(X-1)P' = nP$, on trouve $P(1) = 0$. Donc 1 est une racine de P.
   (b) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$.
   Comme P vérifie $(X-1)P' = nP$, la propriété est vraie pour $k = 0$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $(X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$. En dérivant, on trouve :
   $$(X-1)P^{(k+2)} + P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k+1)} \text{ i.e. } (X-1)P^{(k+2)} = (n-(k+1))P^{(k+1)}$$
   La récurrence est établie. Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, (X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}$.
   (c) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(n-k)P^{(k)}(1) = 0$.
   Donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(1) = 0$. De plus, $P^{(n)}(1) = n!a_n \neq 0$.
   Conclusion : 1 est racine de P de multiplicité n.
3. P est un polynôme de degré n et on a trouvé n racines comptées avec multiplicité, d'où P est scindé.
   Plus précisément, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $P = \lambda(X-1)^n$.

Synthèse et conclusion :

4. Pour $P = \lambda(X-1)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $(X-1)P' = n\lambda(X-1)^n = nP$.
   Conclusion l'ensemble des solutions du problème est $\{\lambda(X-1)^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Partie III : étude du point fixe du sinus cardinal

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée sinus cardinal.
On a représenté ci-dessous sa courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.



On considérera aussi la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$.

1. $f(x) = 0 \iff x \neq 0$ et $\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$.
   Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$.
2. Soit $x \neq 0$, $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x} = f(x)$ et $f(-0) = f(0)$. Donc la fonction f est paire.
   Par ailleurs, $|\sin(x)| \leqslant 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.
3. On a déjà que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car f est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ avec celle située au dénominateur ne s'annulant pas.
   De plus, $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, d'où $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to0}{\sim} 1$. D'où $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec celle située au numérateur ne s'annulant pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}\,.$$
5. Le but de cette question est de montrer que f est dérivable en 0.
   (a) La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis, sin est 1-lipschitzienne.
   D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - \sin(0)| \leqslant |x - 0|$ i.e. $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : x \mapsto -x\sin(x)$. On utilise l'égalité des accroissements finis entre 0 et x pour g. Il existe donc a_x compris entre 0 et x tel que $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(a_x)$ i.e. $g(x) = -a_x \sin(a_x)\, x$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f'(x)| = \frac{|g(x)|}{x^2} \leqslant \frac{|a_x||\sin(a_x)|}{|x|} \leqslant |x|$.
   (d) On a donc $f'(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note I_k l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$.

6. La fonction g est continue et dérivable sur I_0. Pour tout $x \in I_0$,
   $$g'(x) = -x\sin(x) \leqslant 0\,.$$

De plus, il y a égalité uniquement pour $x = 0$ ou $x = \pi$. L'ensemble des points dans I_0 où la fonction g' s'annule est un ensemble fini, donc g est strictement décroissante sur I_0. Donc pour tout $x \in I_0 \backslash \{0\}$,

$$g(x) < g(0) = 0\,.$$

On en déduit que $f' < 0$ sur $]0, \pi]$ et $f'(0) = 0$. L'ensemble des points de I_0 où la fonction f' s'annule est un ensemble fini, donc f est strictement décroissante sur I_0.

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) f est continue sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, dérivable sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ et $f(k\pi) = f((k+1)\pi) = 0$.
   D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $\alpha_k \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(\alpha_k) = 0$.
   (b) Supposons par l'absurde qu'il existe un réel $\beta_k \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(\beta_k) = 0$.
   La fonction g est continue et dérivable sur I_k. On a $g(\beta_k) = \beta_k^2 f'(\beta_k) = 0$ et $g(\alpha_k) = \alpha_k^2 f'(\alpha_k) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe γ_k entre α_k et β_k tel que $g'(\gamma_k) = 0$ ce qui est impossible.
   En effet, pour tout $x \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$, $g'(x) = -x\sin(x) \neq 0$.
   Conclusion : il existe un unique réel $\alpha_k \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(\alpha_k) = 0$.
   (c) On a que $f'(k\pi) = \frac{(-1)^k}{k\pi}$ et il existe un unique réel $\alpha_k \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(\alpha_k) = 0$.
   Comme f' est continue sur I_k :
   - si k est pair alors f' est strictement positive sur $[k\pi, \alpha_k[$ et f' est strictement négative sur $]\alpha_k, (k+1)\pi]$. Donc f est strictement croissante sur $[k\pi, \alpha_k]$ et f est strictement décroissante sur $[\alpha_k, (k+1)\pi]$.
   - si k est impair alors f' est strictement négative sur $[k\pi, \alpha_k[$ et f' est strictement positive sur $]\alpha_k, (k+1)\pi]$. Donc f est strictement décroissante sur $[k\pi, \alpha_k]$ et f est strictement croissante sur $[\alpha_k, (k+1)\pi]$.

8. (a) Considérons $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - g(x)$. Donc h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$h'(x) = x + x\sin(x) = x(1 + \sin(x))\,.$$

   On en déduit que $h' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $h' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante h sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, h admet un minimum en 0 qui vaut $h(0) = 0$.
   Conclusion : h est positive sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

   On admet qu'on a aussi l'inégalité $g(x) \geqslant -\dfrac{x^2}{2}$.

   (b) On a que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

   $$-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

   Par ailleurs $f'(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

9. Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ un point fixe de f,
   $f(c) = c$, donc $c \neq 0$ et $c \neq 1$ (car $f(0) = 1$ et $f(1) \neq 1$).
   On a $\sin(c) = c^2$, donc $-1 \leqslant c \leqslant 1$.
   De plus, la fonction sinus est négative sur $[-1, 0[$.
   On en déduit que s'il existe un point fixe c de f alors $c \in]0, 1[$.
   Considérons $s : x \mapsto f(x) - x$. Les points fixes de f sont les zéros de s.
   La fonction s est continue sur $[0, 1]$ et $s(0) = 1 > 0$ et $s(1) = \sin(1) - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $s(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.
   Or f est strictement décroissante sur I_0 (question 6.), par conséquent s est strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc injective. Donc si il existe $c' \in [0, 1]$ tel que $s(c') = s(c) = 0$ alors $c' = c$.
   Conclusion : f admet un unique point fixe c dans $\mathbb{R}$, et ce point fixe appartient à $]0, 1[$.

10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 0$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) On a montré dans la question 6. que f est strictement décroissante sur I_0 et donc sur $[0,1]$. On en déduit que si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors

$$0 < f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0) = 1\,.$$

Donc $[0,1]$ est stable par f.
Comme $u_0 = 0 \in [0,1]$, on a que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La fonction f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
D'après l'inégalité des accroissement finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(c)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - c|$ i.e.

$$|u_{n+1} - c| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - c|$$

(c) D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - c| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - c|$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n - c| = 0$.
On a montré que (u_n) converge vers c.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - c| \leqslant \dfrac{c}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. On choisit donc n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$ i.e. $n \geqslant \log_2(10^3)$.

(e) La fonction f est décroissante sur $[0,1]$ donc $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$. On en déduit que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de monotonie inverse. Or $u_2 \geqslant u_0 = 0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite (u_n) converge vers c, donc les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) converge également vers c. On en déduit alors que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leqslant u_{2n} \leqslant c \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_1\,.$$

On a donc $|u_n - c| \leqslant |u_n - u_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - u_{n+1}| \leqslant \varepsilon \implies |u_n - c| \leqslant \varepsilon$.

(f)
```
import math
def f(x):
    if x==0:
        return 1
    else:
        return math.sin(x)/x

def erreur(e):
    u=0
    v=f(0)
    while abs(u-v)>e:
        u=v
        v=f(v)
    return u
```